

Il materiale che qui proponiamo consente di organizzare in una classe uno o più laboratori incentrati sul tema dell'ottimizzazione di forme geometriche. Gli argomenti trattati riguardano le reti di lunghezza minima, il problema isoperimetrico e i fenomeni di riflessione di raggi luminosi e di rimbalzo di corpi elastici. Le attività proposte comprendono esperimenti, costruzioni di figure geometriche e simulazioni e animazioni interattive al computer, e sono accompagnate da approfondimenti teorici e da spunti per ulteriori ampliamenti.

Il materiale per gli esperimenti è costituito da aparati per lo studio di forze in equilibrio, da lastre per la realizzazione di lamine di sapone, da specchi piani e da biliardi ellittici, da serie di cilindri e di tessere con il disegno di particolari reti che si richiede di misurare e confrontare.

Gli *exhibit* sperimentali sono accompagnati da pannelli con immagini esplicative ed evocative, da schede per gli studenti contenenti quesiti e proposte di attività (tre schede sulle reti minime, tre schede sulla proprietà isoperimetrica e due schede sulla riflessione) e da questo quaderno per l'insegnante, contenente la descrizione dettagliata delle attività proposte, le loro finalità, l'indicazione delle soluzioni e ulteriori commenti, approfondimenti ed esercizi.

Questi laboratori nascono dalle attività che il Centro *matematita* svolge da tempo per affiancare l'insegnamento pre-universitario (<http://matematita.it/progetti/laboratori.php>) e sono stati in parte testati sia presso il Museo Tridentino di

Scienze Naturali, in occasione dell'allestimento della mostra *matetrentino*, sia nell'ambito de *La bottega del matematico*, un evento organizzato dall'Intendenza Scolastica Provinciale di Lingua Italiana di Bolzano, che ogni anno coinvolge per una settimana alcuni studenti delle scuole superiori.

I laboratori sono stati progettati per essere svolti mediamente in 10-12 ore e, a diverso livello di approfondimento, sono proponibili agli studenti di tutte le classi di una scuola superiore. Alla fine di questa introduzione si troveranno maggiori indicazioni su come organizzare le attività.

PERCHÉ I MASSIMI E I MINIMI?

I concetti di massimo e di minimo occupano un posto centrale in matematica e in generale nelle materie scientifiche, come ad esempio in fisica, dove le configurazioni di equilibrio di un dato sistema sono spesso descritte in termini di minima energia. Allo stesso modo, i problemi di ottimizzazione sono ampiamente diffusi nelle applicazioni scientifiche e tecnologiche, ad esempio nella progettazione di particolari strutture che devono offrire la massima resistenza a determinate sollecitazioni.

Naturalmente le conoscenze richieste per affrontare tali questioni si collocano spesso ben oltre il bagaglio che si può acquisire nel normale percorso scolastico, tuttavia riteniamo che sia possibile e anzi doveroso avvicinare gli studenti a questi temi fin dai primi anni della scuola superiore (se non addirittura prima, e comunque senza

aspettare di aver introdotto i metodi dell'analisi matematica e il calcolo con le derivate), proponendo problemi ambientati in un contesto geometrico tutto sommato familiare. Pensiamo che questa prassi debba essere incoraggiata, anche con l'obiettivo di rafforzare i legami fra geometria e calcolo, due modi complementari di guardare ai problemi, entrambi utili per la loro comprensione e risoluzione. Si potranno così consolidare concetti geometrici che non di rado restano evanescenti o confusi, mettendo contemporaneamente a frutto le varie tecniche di calcolo acquisite.

Non ultimo, il fatto che tali problematiche siano spesso strettamente collegate con la realtà fisica offre l'opportunità di far toccare con mano il processo di costruzione di un modello matematico idoneo a descrivere il fenomeno osservato, attraversando i passaggi cruciali di tale percorso, dalla sperimentazione e analisi dei dati raccolti alla sintesi dei risultati e alla loro conseguente verifica.

I CONTENUTI

I temi che abbiamo scelto di proporre sono tre: le reti minime, il problema isoperimetrico e la riflessione dei raggi luminosi.

Molto schematicamente, una *rete* non è altro che un modo di collegare fra loro un certo numero di punti, usando delle linee che si possono diramare anche da punti diversi da quelli fissati. Si tratta poi di determinare, fra tutti i possibili collegamenti, quello (o quelli) di lunghezza complessiva minore (*rete minima*). Nelle esperienze proposte

si potrà osservare il tipico fenomeno della formazione di angoli di 120° nei punti di diramazione delle reti minime, proprietà che potrà essere dimostrata nell'ambito del modello teorico.

Il classico *problema isoperimetrico* chiede invece di determinare, fra tutte le figure piane di perimetro fissato, quella di area maggiore o, simmetricamente, fra tutte le figure di area fissata, quella di perimetro minore. Tale problema può evidentemente essere riformulato anche per figure tridimensionali e in tutti i casi la forma migliore è la "più tonda" possibile – il cerchio nel piano e la sfera nello spazio. Affrontare questo problema nella sua generalità è assai laborioso; se però ci si restringe a particolari classi di figure, si riescono a proporre varie attività che permettono di studiarne alcuni aspetti e di comprenderne le caratteristiche essenziali.

Anche le leggi della riflessione e della rifrazione della luce possono essere dedotte da un principio di minimo tempo. Le esperienze e gli approfondimenti proposti intendono far emergere le caratteristiche geometriche delle traiettorie dei raggi luminosi, inquadrando all'interno di una teoria generale. In questo laboratorio si avrà anche modo di sperimentare la proprietà di riflessione dell'ellisse, ritrovandola poi (con quella delle altre coniche) nel modello matematico.

GLI OBIETTIVI E I METODI

Le attività proposte mirano a costruire un ventaglio di esperienze relative ad alcuni temi significativi, che vengono dapprima esplorati da punti

di vista diversi e successivamente interpretati secondo schemi unitari, per essere in seguito approfonditi sotto l'aspetto teorico. Si partirà dall'osservazione di particolari fenomeni per arrivare alla loro modellizzazione, costruendo nel corso delle attività nuovi concetti e recuperando le tecniche utili per la successiva trattazione. Semplici schemi geometrici saranno scelti per rappresentare le varie situazioni sperimentali e, fra le forme in gioco, si dovranno trovare le "migliori", quelle cioè che rispondono a determinati criteri di ottimalità: ad esempio, le reti di lunghezza minima che collegano alcuni punti fissati, le figure di pari perimetro e di area massima, e così via.

Il materiale è organizzato in schede di laboratorio pensate per piccoli gruppi di 4-5 ragazzi, in modo da favorire un atteggiamento attivo di esplorazione e di riflessione sui problemi proposti, l'interscambio delle idee e delle scoperte e la discussione degli eventuali errori.

Ogni scheda è sostanzialmente autosufficiente e tutte sono raccolte e commentate in un'ampia presentazione per l'insegnante, comprendente soluzioni e spunti per ulteriori approfondimenti. Tutte le attività proposte comprendono una fase di sperimentazione (osservazione e descrizione di fenomeni) e una fase di riflessione e inquadramento teorico. Entrambe le fasi hanno a nostro avviso pari importanza e riteniamo fondamentale che gli studenti abbiano a disposizione il tempo necessario alla loro completa attuazione. Sarà cura dell'insegnante, sulla base delle esi-

genze della classe, dei gruppi di lavoro o dei singoli studenti, selezionare all'interno di questa proposta le esperienze da svolgere effettivamente e valutare il tempo da dedicare a ciascuna di esse. Varie indicazioni a tale proposito si potranno trovare nelle pagine dedicate alla presentazione dettagliata delle attività.

IL MATERIALE A DISPOSIZIONE

Il *kit* che presentiamo con questo quaderno comprende:

- una copia plastificata di tutte le schede di laboratorio;
- tre pannelli con immagini relative ai tre temi trattati;
- un apparato con tre fili e tre masse per esperimenti sull'equilibrio di forze (vedi scheda A1);
- 5 serie di 3 lastrine, un anello metallico con filo, cannucce e recipienti in plastica per esperimenti con le lamine di sapone (vedi schede A2, A3 e Complementi alla sezione B);
- 5 serie di 13 tessere con il disegno di alcune reti che congiungono tre o quattro punti (vedi schede A2 e A3);
- 5 serie di 2 rettangoli di plexiglas (vedi scheda B1);
- 5 dispositivi per disegnare ellissi (vedi scheda B2);
- 1 cinturino metallico e biglie di vetro per un'esperienza sulla proprietà isoperimetrica del cerchio (vedi scheda B2);

- 5 serie di 5 cilindri diversi aventi lo stesso volume (vedi scheda B3);
- un piccolo biliardo ellittico per esperienze sulla proprietà focale dell'ellisse (vedi schede C1 e C2);
- un dispositivo laser per esperimenti sulla riflessione in uno specchio piano (vedi scheda C1);
- calibri, righelli, goniometri e indicatori di angoli a 120° ;
- un primo CD (CD1 - *materiali*) che a sua volta comprende:
 - le schede di laboratorio ed altri materiali da stampare e distribuire ai ragazzi;
 - le istruzioni d'uso per tutti gli apparati del kit;
 - l'elenco di tutto il materiale;
- un secondo CD (CD2 - *animazioni*) che a sua volta comprende:
 - alcune animazioni interattive e filmati ad integrazione delle esperienze proposte.

ORGANIZZAZIONE E TEMPI

Le schede di laboratorio sono così organizzate:

A Reti minime

- A1 Forze in equilibrio
- A2 Reti nel triangolo
- A3 Reti nel quadrato

B Proprietà isoperimetrica

- B1 Perimetro e area dei rettangoli
- B2 Perimetro e area dei triangoli e dei poligoni
- B3 Volume e area dei cilindri

C Riflessione

- C1 Riflessioni e rimbalzi
- C2 Percorsi minimi

Ogni insegnante può naturalmente ritagliare il proprio percorso, a seconda dei propri interessi, della classe a cui lo presenta, del tempo che intende utilizzare. Diamo qui di seguito qualche suggerimento.

Le attività proposte nelle schede del gruppo A riguardano le reti di lunghezza minima che collegano alcuni punti assegnati nel piano. Sugeriamo di dedicare due ore consecutive alla parte sperimentale descritta nelle schede A1, A2, A3 e altre due ore alla riflessione sull'attività svolta e all'approfondimento dei risultati ottenuti. Per ottimizzare i tempi, suggeriamo di svolgere le attività sperimentali, che comportano anche l'uso di acqua saponata, in un'aula di laboratorio, dove sarà stato preventivamente allestito il materiale.

Le attività proposte nelle schede del gruppo B si riferiscono a problemi di massimo e di minimo riguardanti perimetro, area e volume di figure geometriche nel piano e nello spazio. Sugeriamo di suddividere le attività in due incontri indicativamente di due ore ciascuno e da svolgersi in una normale aula scolastica. Il primo incontro sarà dedicato al problema isoperimetrico nel piano (schede B1 e B2, o anche una sola delle due), il secondo all'analogo problema nello spazio (scheda B3).

Le attività proposte nelle schede del gruppo C riguardano l'interpretazione matematica di feno-

meni di riflessione di raggi luminosi e di rimbalzo di corpi elastici. Sugeriamo di dedicare un'ora alla fase sperimentale (delineata nella scheda C1), da svolgersi in un'aula normale o, anche per ottimizzare i tempi, in un'aula di laboratorio. Un'altra ora, o forse due, sarà successivamente dedicata all'inquadramento teorico, seguendo le linee esposte nella scheda C2.

Questa proposta di organizzazione temporale delle attività è puramente indicativa e, come precedentemente sottolineato, dovrà essere adeguatamente calibrata dall'insegnante, utilizzando allo scopo anche i suggerimenti proposti nel seguito.

Il materiale, sicuramente adatto per un triennio di scuola secondaria superiore, è stato organizzato cercando, per quanto possibile, di renderlo utilizzabile anche nel biennio, proponendo una varietà di argomentazioni fondate su tecniche dimostrative diverse e adeguate al livello delle conoscenze delle varie classi.

Per finire, vi invitiamo a utilizzare il forum a questo indirizzo <http://www.matematita.it/forum> per segnalare tutte le osservazioni e i commenti che si ritengono necessari. Il forum potrà essere un utile strumento di confronto tra gli utilizzatori di questo *kit*.